BIDRAG TIL THEORIEN

AF

DE PERIODISKE KJÆDEBRÖKER,

VED

C. RAMUS,

PROFESSOR.

(Fremlagt i Videnskabernes Selskab den 14de Juli 1837.)

Kjædebröken forudsættes her at være af den sædvanlige Form, saa at alle dens Led ere positive hele Tal og Tællerne $= 1$. Er den tilmed *periodisk*, kan den almindeligen fremstilles ved

$$X = a, a_1, a_2, a_3 \ldots a_k, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots a_{k+n}, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots a_{k+n}, a_{k+1} \ldots \quad (1)$$

idet $a, a_1, a_2, \ldots$ betegne de successive Led begyndende med a, som er det hele Tal nærmest $< X$, altsaa $a = 0$ naar $X < 1$.

Som bekjendt kan X bestemmes som Rod i en qvadratisk Ligning med rationale Coefficienter. Dette bevises let ved at sætte

$$x = a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_{k+n}, a_{k+1} \ldots \quad (2)$$

og ved at söge den qvadratiske Ligning for x. Betegnes nemlig Rækken af de complete Qvotienter ved

$$x, x_1, x_2, x_3, \ldots$$

og betegnes de tilsvarende Convergenter ved

$$\frac{y_0}{z_0}, \frac{y_1}{z_1}, \frac{y_2}{z_2}, \frac{y_3}{z_3}, \ldots$$

begyndende med $\frac{y_0}{z_0} = \frac{a_{k+1}}{1}$, saa er ifölge en bekjendt Egenskab ved Kjædebrökerne

$$x_r = \frac{y_{r-2} - z_{r-2}\, x}{z_{r-1}\, x - y_{r-1}}.$$

Tages her $r = n$ og bemærkes at $x_n = x$ ifölge Kjædebrökens Periodicitet, erholdes

$$z_{n-1}x^2 - (y_{n-1} - z_{n-2})\,x - y_{n-2} = 0. \tag{3}$$

Denne Ligning har en positiv og en negativ Rod, af hvilke den förste er Værdien af Kjædebröken (2).

Sættes dernæst

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{p}{q} = a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots a_k \\[2ex] \dfrac{p^0}{q^0} = a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots a_{k-1} \end{array}\right\} \tag{4}$$

og bemærkes, at x er en complet Qvotient for X, erholdes

$$x = \frac{p^0 - q^0 X}{qX - p}, \tag{5}$$

som indsat i (3) giver

$$z_{n-1}(p^0 - q^0X)^2 - (y_{n-1} - z_{n-2})(p^0 - q^0X)(qX - p) - y_{n-2}(qX - p)^2 = 0 \tag{6}$$

som er den sögte qvadratiske Ligning.

Coefficienten for X i denne Ligning kan skrives saaledes

$$\left.\begin{array}{l} pqz_{n-2}\left(\dfrac{y_{n-2}}{z_{n-2}} + \dfrac{q^0}{q}\right) - p^0qz_{n-1}\left(\dfrac{y_{n-1}}{z_{n-1}} + \dfrac{q^0}{q}\right) \\[2ex] + pqz_{n-2}\left(\dfrac{y_{n-2}}{z_{n-2}} + \dfrac{p^0}{p}\right) - pq^0z_{n-1}\left(\dfrac{y_{n-1}}{z_{n-1}} + \dfrac{p^0}{p}\right) \end{array}\right\}$$

og da et hvilketsomhelst Antal af Perioder i Kjædebrökerne (1) og (2) kunne samles i een Periode uden at x eller X forandres, kan i Ligning (6) n antages uendelig stor, hvorved $\dfrac{y_{n-1}}{z_{n-1}}$ og $\dfrac{y_{n-2}}{z_{n-2}}$ falde sammen med x, og Coefficienten for X bliver

$$qp^0z_{n-2}\left(x + \frac{q^0}{q}\right)\left(\frac{p}{p^0} - \frac{z_{n-1}}{z_{n-2}}\right) + pq^0z_{n-2}\left(x + \frac{p^0}{p}\right)\left(\frac{q}{q^0} - \frac{z_{n-1}}{z_{n-2}}\right).$$

For at denne Störrelse skulde kunne forsvinde, maatte $\frac{p}{p^0} - \frac{z_{n-1}}{z_{n-2}}$ og $\frac{q}{q^0} - \frac{z_{n-1}}{z_{n-2}}$ have modsat Fortegn, eller $\frac{z_{n-1}}{z_{n-2}}$ være beliggende mellem $\frac{p}{p^0}$ og $\frac{q}{q^0}$; men ifölge (4) haves, paa Grund af en bekjendt Egenskab ved Kjædebrökerne

$$\frac{q}{q^0} = a_k, a_{k-1}, \ldots a_1$$

$$\frac{p}{p^0} = a_k, a_{k-1}, \ldots a$$

og paa lignende Maade

$$\frac{z_{n-1}}{z_{n-2}} = a_{k+n}, a_{k+n-1}, a_{k+n-2}, \ldots$$

fortsat i det uendelige formedelst $n = \infty$. Skulde nu denne sidste Kjædebrök være indsluttet mellem de to foregaaende, maatte man have $a_{k+n} = a_k$, $a_{k+n-1} = a_{k-1}$, ..., hvoraf fulgte at Perioden i (1) ikke begyndte med a_k som det förste Led. Ligning (6) kan altsaa, under Forudsætning af $k > 0$, umulig være en reen qvadratisk Ligning, eller med andre Ord: en Kjædebrök af Formen (1) kan ikke udtrykkes i sin Værdi blot ved Qvadratroden af en rational Störrelse, men den er liig Summen af en irrational Störrelse af denne Art og en rational Störrelse.

Derimod vil (3) blive en reen Ligning, og derved Værdien af Kjædebröken (2) angivelig ved Qvadratroden af en rational Störrelse, hvis

$$y_{n-1} = z_{n-2}. \qquad (7)$$

Da stedse $z_{n-2} < z_{n-1}$, saa er ifölge (7) $\frac{y_{n-1}}{z_{n-1}} < 1$, men ifölge Beskaffenheden af de convergerende Bröker vil det være umuligt, at 1 kan være beliggende mellem $\frac{y_{n-1}}{z_{n-1}}$ og x, altsaa $x < 1$, hvoraf atter fölger $a_{k+1} = 0$, eller blot $a_1 = 0$, naar k, som her er overflödig, udelades idet man sætter

$$x = a_1, a_2, \dots a_n, a_1, a_2, \dots a_n, \dots \qquad (8)$$

Det sees let, at

$$a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 \ \&c.}}}} = a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + a_2 + \cfrac{1}{a_3 \ \&c.}}$$

altsaa ved at sætte $\frac{1}{x} = y$ haves

$$y = a_2, a_3, \dots a_{n-1}, a_n + a_2, a_3, \dots$$

$$y = \sqrt{\frac{z_{n-1}}{y_{n-2}}}$$

idet

$$\frac{y_{n-1}}{z_{n-1}} = 0, a_2, a_3, \dots a_n, \quad \frac{y_{n-2}}{z_{n-2}} = 0, a_2, a_3, \dots a_{n-1},$$

eller

$$\frac{z_{n-1}}{y_{n-1}} = a_2, a_3, \dots\dots a_n, \quad \frac{z_{n-2}}{y_{n-2}} = a_2, a_3, \dots\dots a_{n-1}.$$

Fremdeles fölger af (7) at Rækken $a_2, a_3, \dots a_n$ er symmetrisk (*Théorie des nombres T. I. pag. 27*) d. e. $a_2 = a_n$, $a_3 = a_{n-1}$, $a_4 = a_{n-2} \dots$ Altsaa er Rækken $a_3, a_4, \dots a_{n-1}$ ligeledes symmetrisk. Ved en ringe Forandring i Betegnelsen kunne disse Resultater saaledes fremstilles:

$$\left.\begin{array}{l}
\sqrt{A} = a, a_1, a_2, a_3, \dots a_{n-1}, 2a, a_1, a_2, \dots \\
\qquad a_p = a_{n-p} \qquad (p > 0 \text{ og } < n) \\
A = \frac{p}{q^0} \begin{cases} \frac{p}{q} = a, a_1, a_2, \dots a_{n-1}, a. \\ \frac{p^0}{q^0} = a, a_1, a_2, \dots a_{n-1}. \end{cases} \\
q = p^0.
\end{array}\right\} \quad (9)$$

A er altsaa rational, ikke qvadratisk (efterdi Kjædebröken for $\sqrt{A}$ er uendelig) og > 1 (efterdi $p > q > q^0$). Tilfældet $A < 1$ erholdes heraf ved blot Omvenden af Brökerne, idet for A, $\frac{p}{q}$, $\frac{p^0}{q^0}$, $\frac{p}{q^0}$ sættes $\frac{1}{A}$, $\frac{q}{p}$, $\frac{q^0}{p^0}$, $\frac{q^0}{p}$ og foran Kjædebrökerne tilföies det Led 0,. Dette vil, med forandrede Bogstaver, kunne skrives saaledes:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{B} = 0,\ a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{n-1},\ 2a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots \\ \qquad a_p = a_{n-p}\ (p > 0 \text{ og } < n) \\ B = \dfrac{r^0}{s} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{r}{s} = 0,\ a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{n-1},\ a. \\ \dfrac{r^0}{s^0} = 0,\ a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{n-1}. \end{array}\right. \\ r = s^0. \end{array}\right\} \quad (10)$$

Formlerne (9) og (10) tjene ikke blot til at summere en særegen Classe af periodiske Kjædebröker, men fremstille tillige, ifölge den Maade hvorpaa de ere erholdte og paa Grund af det om Ligning (6) beviste, *de eneste mulige Tilfælde, i hvilke Værdien af en periodisk Kjædebrök kan udtrykkes blot ved Qvadratroden af en rational Störrelse.*

Ifölge det bekjendte Theorem om to successive convergerende Bröker er i (9) $pq^0 - p^0q = (-1)^{n-1}$, men $p = Aq^0$ og $p^0 = q$, altsaa

$$Aq^{02} - p^{02} = (-1)^{n-1} \quad (11)$$

hvor $A > 1$ og $\frac{p^0}{q^0}$ er en Convergent til $\sqrt{A}$ svarende til det næstsidste Led af den förste Periode. Ligesaa er i (10) $rs^0 - r^0s = (-1)^n$, $r^0 = Bs$, $s^0 = r$, altsaa

$$r^2 - Bs^2 = (-1)^n \quad (12)$$

hvor $B < 1$, men $\frac{r}{s}$, bestemt ved (10) er ikke Convergent til $\sqrt{B}$.

Ved i Kjædebrökerne (9) og (10) at samle et Antal $= t$ af Perioder i een, hvilket ikke forstyrrer deres symmetriske Sammensætning, erholdes istedetfor (11) og (12) mere almindeligt:

$$Aq_t^{o2} - p_t^{o2} = (-1)^{tn-1} \tag{13}$$

hvor $\frac{p_t^o}{q_t^o}$ er Convergent til $\sqrt{A}$ af Index $tn - 1$ eller svarende til det næstsidste Led af den t^{te} Periode; og

$$r_t^2 - Bs_t^2 = (-1)^{t(n+1)-1} \tag{14}$$

hvor $\frac{r_t}{s_t}$ er Værdien af Kjædebröken for $\sqrt{B}$ afbrudt ved Enden af den t^{te} Periode idet sidste Led $2a$ forandres til a.

I *Théorie des nombres* er der givet Beviis for, at naar A er et heelt Tal ikke qvadratisk, vil stedse $\sqrt{A}$ give ved Udvikling en Kjædebrök af Formen (9). Ved en ringe Modification i Beviset, som ikke behöver her at angives, udstrækkes det til at gjælde for enhver rational ikke qvadratisk Störrelse A, saaledes at $\sqrt{A}$ giver en Kjædebrök af Formen (9) eller (10) eftersom $A > 1$ eller $A < 1$. Dette Theorem er det omvendte af det ovenfor fundne, og det vil paa Grund af dette sidste være tilstrækkeligen beviist, saasnart blot Kjædebrökens Periodicitet er godtgjort.

De complete Qvotienter til $\sqrt{A}$, naar $A > 1$, danne en Række af fölgende Form

$$\frac{\sqrt{A}+P_0}{Q_0},\ \frac{\sqrt{A}+P_1}{Q_1},\ \frac{\sqrt{A}+P_2}{Q_2},\ \ldots$$

begyndende med $\sqrt{A}$ selv, saa at $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$. Den samme Række tilhörer $\sqrt{\frac{1}{A}}$ kun med Tilföielse af $\sqrt{\frac{1}{A}}$ selv som förste Led, ligesom Kjædebröken for $\sqrt{A}$ maa erholde foran tilföiet det Led 0, for at blive forandret til Kjædebröken for $\sqrt{\frac{1}{A}}$. Paa denne Maade er Tilfældet $A < 1$ almindeligen reduceret til $A > 1$.

Loven for den successive Dannelse af Rækkerne

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$$

$$Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$$

er udtrykt i de bekjendte Formler

$$P_{r+1} = a_r Q_r - P_r \tag{15}$$

$$Q_r Q_{r+1} = A - P_{r+1}^2 \tag{16}$$

hvorved findes

$$Q_{r+1} = Q_{r-1} + a_r (P_r - P_{r+1}) \tag{17}$$

som fremstille disse Rækkers Relationer til Leddene i Kjædebröken. Deres Relationer til de convergerende Bröker, almindeligen betegnede $\frac{y_r}{z_r}$ og begyndende med $\frac{y_0}{z_0} = \frac{a}{1}$, ere givne ved

$$(-1)^r P_r = z_{r-1} z_{r-2} A - y_{r-1} y_{r-2} \tag{18}$$

$$(-1)^r Q_r = y_{r-1}^2 - A z_{r-1}^2 \tag{19}$$

hvorved findes

$$\left(\frac{y_{r-1}}{z_{r-1}} - P_r\right)\left(\frac{y_{r-2}}{z_{r-2}} + P_r\right) = A - P_r^2 = Q_{r-1} Q_r. \tag{20}$$

Disse Formler vise, at P_r og Q_r ere positive rationale, og tilmed hele hvis A er heel, men indeholde, hvis A er brudden, kun den samme Nævner som A. De samme Formler tjene til at opdage alle Egenskaberne ved Rækkerne P og Q. En af de meest iöinefaldende, næst efter deres Periodicitet som er jævnsides med Kjædebrökens Periodicitet, er *den symmetriske Sammensætning af deres Perioder.* Dette har ikke hidtil været tilstrækkeligen godtgjort, omendskjöndt det finder Anvendelse ved Oplösningen i hele Tal af den ubestemte Ligning

$$y^2 - Ax^2 = \pm D$$

hvor A og D ere hele Tal, ikke qvadratiske, og $D < \sqrt{A}$. *Legendre* har blot bemærket, at hvis D findes i Perioden Q_0, Q_1, Q_2, ... Q_n, maa den, hvis den ikke er det midterste Led (d. e. hvis ikke $D = Q_{\frac{n}{2}}$ idet n er lige), forekomme idetmindste to Gange i samme, „efterdi Perioden er symmetrisk" (*Théorie des nombres* T. I. pag. 59); men han har vel beviist i det foregaaende Symmetrien af Leddene a_1, a_2, ... a_{n-1} dannede af Kjædebrökens Periode med Bortkastelse af det sidste Led $a_n = 2a$, derimod har han intetsteds beviist Symmetrien af den her omhandlede Periode, som er symmetrisk i sin hele Udstrækning.

Formlen (19) sammenholdt med (11) giver $Q_n = 1$, altsaa

$$Q_n = Q_0. \qquad (21)$$

Ifölge (18), idet $\frac{y_0}{z_0} = \frac{a}{1}$, $\frac{y_{-1}}{z_{-1}} = \frac{1}{0}$, haves $P_1 = a$, som ogsaa ligefrem erholdes; men ifölge (15) $P_n = a_n Q_n - P_{n+1}$, hvor $a_n = 2a$, $Q_n = 1$ og $P_{n+1} = P_1 = a$ (formedelst Kjædebrökens Periodicitet); altsaa er $P_n = a$ eller

$$P_n = P_1. \qquad (22)$$

Ifölge (15) haves, idet $a_p = a_{n-p}$,

$$P_{p+1} + P_p = a_p Q_p,$$

$$P_{n-p+1} + P_{n-p} = a_p Q_{n-p}.$$

Antages nu

$$P_p = P_{n-p+1}, \qquad (23)$$

erholdes, ved at subtrahere de to foregaaende Ligninger fra hinanden,

$$P_{n-p} - P_{p+1} = a_p (Q_{n-p} - Q_p). \qquad (24)$$

Ifölge (16) er $Q_{n-p}\,Q_{n-p+1} = A - P^2_{n-p+1}$ eller ifölge (23) $Q_{n-p}\,Q_{n-p+1} = A - P^2_p$, men tillge er $Q_{p-1}\,Q_p = A - P^2_p$, altsaa

$$Q_{p-1}\,Q_p = Q_{n-p}\,Q_{n-p+1}. \qquad (25)$$

Fremdeles antage man

$$Q_{p-1} = Q_{n-p+1} \qquad (26)$$

hvorved (25) reduceres til

$$Q_p = Q_{n-p} \qquad (27)$$

og derved igjen (24) til

$$P_{p+1} = P_{n-p}. \qquad (28)$$

Bemærkes nu at de antagne Formler (23) og (26) medföre nödvendigen disse to andre (27) og (28), der kun ere forskjellige fra de to förste derved at p er forandret til $p + 1$, og bemærkes tillige at (23) og (26) finde Sted for $p = n$ ifölge (21) og (22), saa sluttes at Rækkerne

$$P_1,\ P_2, \ldots P_n,$$
$$Q_0,\ Q_1,\ Q_2, \cdots Q_n,$$

ere symmetriske. Paa lige Maade ville Rækkerne

$$P_{n+1},\ P_{n+2}, \ldots P_{2n},$$
$$Q_n,\ Q_{n+1},\ Q_{n+2}, \cdots Q_{2n},$$

og almindeligen Rækkerne

$$P_{tn+1},\ P_{tn+2}, \ldots P_{tn},$$
$$Q_{tn},\ Q_{tn+1},\ Q_{tn+2}, \cdots Q_{tn},$$

være symmetriske, og tilmed, ifölge Periodicitetens Lov, identiske med de to förste Rækker.